Glücksspiel in Theorie und Praxis

Manfred Borovcnik, Klagenfurt

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat sich aus dem Bereich der Glücksspiele entwickelt. Dort begegnet man häufig Situationen, in denen man die endlich vielen Ergebnisse als symmetrisch austauschbar und daher als gleich wahrscheinlich interpretieren kann. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E als Zusammenfassung von mehreren Ergebnissen aus M wurde daher konsequenterweise mit

$$W(E) = \text{günstige} / \text{mögliche} = |E|/|M|$$

festgelegt. Diese Definition geht auf Laplace (1812) zurück. Schon zuvor hat man sich auch mit der Deutung von Wahrscheinlichkeit als relativer Häufigkeit beschäftigt, mit dem zunehmenden Einfluß der Physik und der damit verbundenen experimentellen Forschungsmethode wurde diese Sichtweise immer wichtiger. Eine Definition von Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit jedoch, wie sie von Mises 1915 versuchte, schlug fehl.

Heute legt man Wahrscheinlichkeit indirekt durch Axiome fest (Kolmogoroff, 1933). Darin wird Wahrscheinlichkeit als eine Funktion W festgelegt, die Ereignissen eine reelle Zahl zuordnet, die ganz bestimmte Eigenschaften (wie nichtnegativ, normiert mit 1 und abzählbar additiv) erfüllt. Zu diesen Axiomen kommt noch eine grundlegende Definition hinzu, nämlich die der bedingten Wahrscheinlichkeit. Damit hat man die mathematische Grundlage, die Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie abzuleiten.

Doch auch heute ist für das individuelle Lernen der Glücksspielbereich ein wichtiger, aus dem man die Begriffe lernen kann. Im folgenden wird ein geschichtlicher Rückblick auf Glücksspiele gegeben; eine begriffliche Zusammenschau soll auch klären, warum Glücksspiele im Unterricht noch immer eine Rolle spielen sollen; schließlich werden Lotto und Roulette exemplarisch behandelt.

1. Glücksspiele im geschichtlichen Rückblick

a) Der Astragalus

Die ältesten bekannten Gegenstände, die zu Glücksspielen und zu Gottesentscheiden verwendet wurden, waren die sogenannten Astragali. Dabei handelt es sich um Knochen aus dem Sprunggelenk von Schafen oder Ziegen. Man findet diese Knochen schon in Gräbern aus prähistorischer Zeit. Verstärkt treten sie auf im 3. Jahrtausend v. Chr. in verschiedensten Kulturen, vornehmlich in Süd- und Südosteuropa, Vorderasien und China auf.

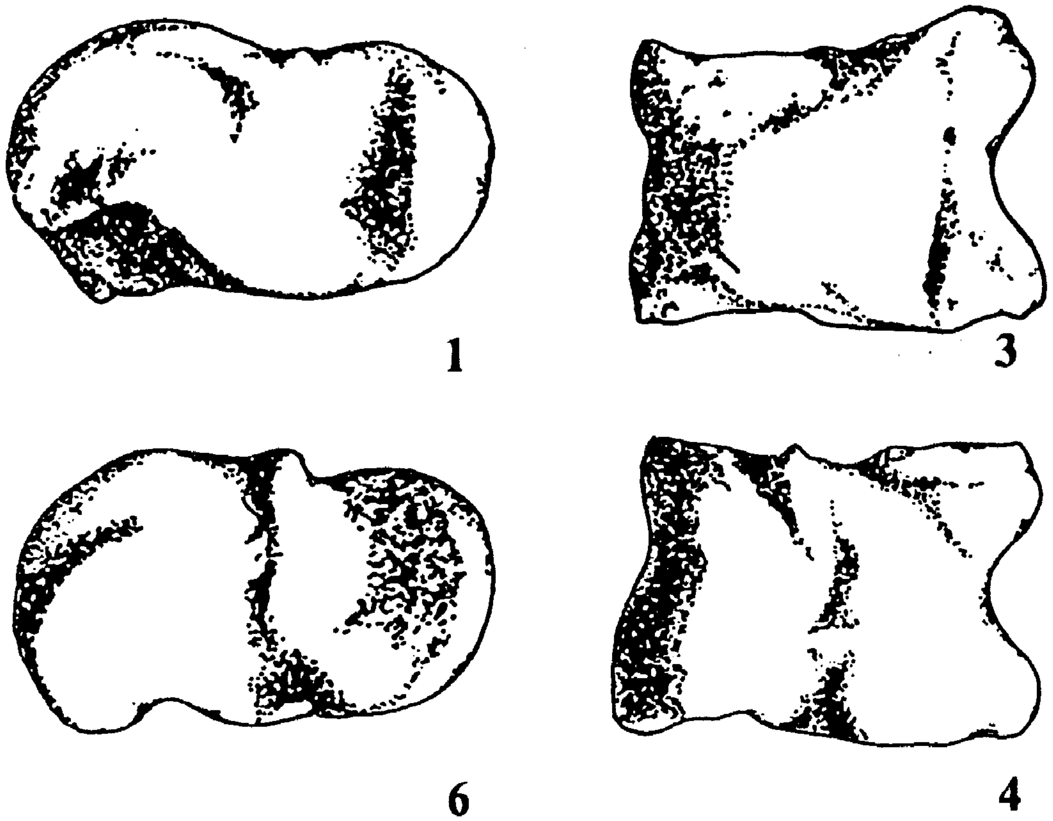

Abb. 1: Astragalus, Sprungbein des Schafs; links die beiden Schmalseiten, rechts die beiden Breitseiten.

Das Spiel mit den Astragali war besonders bei den Römern weit verbreitet, die Spielregeln sind jedoch nur fragmentarisch überliefert, weil durch die fortschreitende Christianisierung diese heidnischen Bräuche verboten wurden. Man spielte mit vier (manchmal auch mit drei) Knöchelchen, deren Seiten mit 1 (volle Schmalseite), 3 (eingebuchtete Breitseite), 4 (bauchige Breitseite) und 6 (eingedrückte Schmalseite) bezeichnet waren. Die Bezeichnungen standen wohl in Verbindung mit den auch in Verwendung stehenden Würfeln.

Die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Seiten kann man aus Wurfserien schätzen mit etwa

$$W(1) \approx 8.7\% \quad W(6) \approx 9.2\% \quad W(3) \approx 43.0\% \quad W(4) \approx 39.1\%$$

Vier oder fünf Astragali kombiniert wurden zur Erstellung von Orakeln verwendet. Dazu mußte für jede der Kombinationen ein Orakelspruch als Antwort auf die zu stellende Frage bereit gestellt werden. Ein Spruch zur Illustration:

> 44466: Drei Vierer, zwei Sechser. Das ist der Rat der Gottheit: Bleib zu Hause und geh nicht irgendwohin, damit nicht die reißende Bestie und die rächende Furie über dich kommen; denn ich sehe, daß das Vorhaben weder gefahrlos noch sicher ist.

Bemerkung: Entgegen der Formulierung des Spruches hat die Reihenfolge der Würfe keine Rolle gespielt.

b) Der Würfel

Verwendete man als Zufallsgerät einen Halswirbelknochen, so konnten beim Werfen tatsächlich alle 6 Seiten auftreten. Denselben Effekt erzielt man, wenn man Astragali entsprechend glatt schleift. Später verwendete man auch Würfel aus Ton oder Glas.

Die Erfindung des Würfels wird von Plinius in seiner Beschreibung des Troianischen Krieges dem Palamedes zugeschrieben, der damit die lange Zeit der Belagerung für die Krieger überbrücken wollte. Fundstellen im nördlichen Irak zeigen, daß im alten Babylon (ca. 3000 v.Chr.) schon Würfel aus Ton Verwendung fanden. Würfel aus ägyptischen Gräbern stammen von ca. 2000 v.Chr. Die Anordnung der Augenzahlen war jedoch noch nicht in der heute üblichen Form, sondern es waren immer zwei aufeinanderfolgende Zahlen gegenüber; also 3 gegenüber von 2, 5 gegenüber von 4 und 1 gegenüber von 6. Erst um 1500 v. Chr. tauchen Würfel in der heute üblichen Beschriftung auf. Von der Leidenschaft der Germanen beim Würfelspiel berichtet Tacitus (ca. 100 n.Chr.)

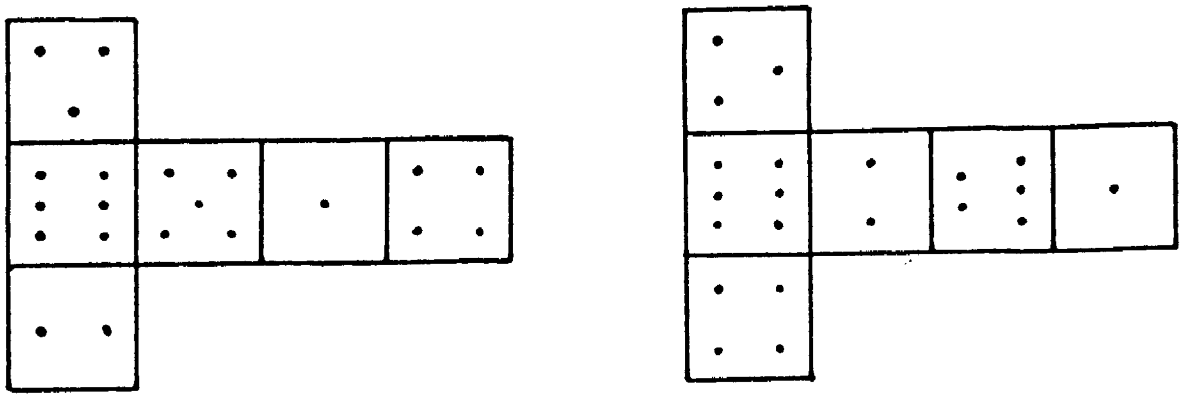

Abb. 2: Abwicklung alter Würfel - links der älteste bekannte Würfel aus dem Irak, rechts ein Würfel aus Indien; beide aus dem 3. Jt. v. Chr.

Waren diese alten Würfel als ideale Würfel zu bezeichnen? Einige davon sehr wohl, einige wiederum lassen diesbezüglich sehr viele Wünsche offen. Ein knöcherner Würfel aus Ägypten (16.Jh. v. Chr.) ergab bei 235 Würfen folgende Häufigkeiten: 37, 17, 49, 59, 28, 45. Ein gläserner Würfel aus Ägypten (2.Jh. n.Chr.) ergab bei 232 Würfen: 49, 38, 38, 29, 30, 48. Man kann etwa mit dem x^2-Test prüfen, ob diese Daten mit einer Gleichverteilung der Augenzahlen vereinbar sind oder nicht.

Im alten Rom war die Spielleidenschaft, insbesondere im Glücksspiel mit dem Würfel, so groß, daß das Spiel von Zeit zu Zeit verboten werden mußte. Man spielte bis auf das letzte Hemd, ja man ging sogar freiwillig in die Sklaverei, wenn man kein Geld mehr setzen konnte. Caesar wird beim Überschreiten des Rubikons der Spruch "Iacta alea est" zugeschrieben. Übersetzt heißt das, der Würfel ist gefallen. Sinngemäß meinte er damit wohl, der Ausgang des Unternehmens wäre völlig offen, aber es gäbe (mit dem Überschreiten des Rubikons) auch kein Zurück mehr. Das kann man mit dem Hochwerfen der Würfel vergleichen, die noch nicht gelandet sind, deren Bahn aber unaufhaltsam zum 'Ende' führt.

In Rom hieß der sechsseitig beschriftete Würfel tessera; das bedeutet soviel wie 'vier' und weist auf die quadratischen Seitenflächen hin. Wurde mit 3 tesserae gewürfelt, so galt 666 als bester Wurf (Venus), 111 als schlechtester Wurf (Hund); die Namen wurden an das Spiel mit den Astragali angelehnt. Mit der Christianisierung Roms wurde das Glücksspiel verboten und verlor zunächst an Bedeutung. Das Problem der drei Würfel tauchte in der zweiten Hälfte des 13. Jh. auf, und zeigt an, daß das Glücksspiel im Hintergrund weiterlebte. Das Spiel, das unter dem Namen 'gioco della zara' bekannt war, hatte zum Ziel, die Summe der Punkte von drei Würfeln richtig vorherzusagen. Die Summen 3 und 4 bzw. 17 und 18 sind nicht berücksichtigt worden, weil sie zu selten auftreten, ja man hat das Spiel aus diesem Grund oft auf die Zahlen 7 bis 14 eingeschränkt.

In einem Kommentar zu Dantes Commedia (ca. 1235) illustriert della Lana die Lösung, die den stochastischen Charakter des Problems berücksichtigt. Die Summe, die auf die meisten Möglichkeiten realisiert werden kann, ist die 'beste'. Della Lana verweist jedoch auf die Pointe des Spiels: Welcher Spieler hätte nicht schon die Erfahrung gemacht, daß oft gerade diese Summe kommt, die eigentlich weniger oft kommen sollte? Allerdings macht er bei der Ermittlung der Fälle noch Fehler:

$$\text{Summe } 3 = 1 + 1 + 1$$
$$\text{Summe } 4 = 2 + 1 + 1$$

Nach heutigem Verständnis müßte er die verschiedenen Permutationsmöglichkeiten für den Summanden 2 noch berücksichtigen.

Dem Fürsten der Toskana wird zugeschrieben, daß er sich mit folgendem Problem an Galileo Galilei gewendet hat: Mit den drei Würfeln gibt es für die Summe 9 wie für die Summe 10 sechs verschiedene Tripel. Warum jedoch taucht die Summe 10 beim Spielen häufiger auf? Die verschiedenen Tripel wurden wie folgt abgezählt:

	Summe 9	Summe 10
alle drei Würfel verschieden	6+2+1 5+3+1 4+3+2	6+3+1 5+4+1 5+3+2
Zwei Würfel gleich, einer davon verschieden	5+2+2 4+4+1	6+2+2 4+4+2 4+3+3
Alle drei Würfel gleich	3+3+3	

In 'De Vetula' (zweite Hälfte des 13. Jh.) wurde das Problem der drei Würfel schon vollständig gelöst. In der Tabelle unten bezeichnet Punctatura die Kombinationen der drei Summanden, cadentia die Permutationen, die möglich sind. Nach Auflistung der 216 cadentiae kennt der Leser die 'Schwächen' und 'Stärken' der einzelnen Summen vollständig. Hier liegt einerseits eine kombinatorisch vollständige Liste gleichwahrscheinlicher Ereignisse vor. Gleichzeitig wird in 'De Vetula' das erste Mal die Idee aufgegriffen, daß in symmetrischen Glücksspielen der Anteil an allen Möglichkeiten ein Maß für die Erwartung für ein bestimmtes Ereignis darstellen kann.

3	18	punctatura	1	cadentia	1
4	17	punctatura	1	cadentiae	3
5	16	punctatura	2	cadentiae	6
6	15	punctatura	3	cadentiae	10
7	14	punctatura	4	cadentiae	15
8	13	punctatura	5	cadentiae	21
9	12	punctatura	6	cadentiae	25
10	11	punctatura	6	cadentiae	27

Die statistische Regelmäßigkeit, also eine gewisse Stabilität der relativen Häufigkeiten, ist uns heute mehr oder weniger geläufig. Damit ist gemeint, daß die relativen Häufigkeiten umso bessere Näherungen für die unbekannte Wahrscheinlichkeit liefern, je länger die Serien sind. Ein erster Ansatz taucht sowohl in 'De Vetula' als auch im Dante-Kommentar auf: Es wird klar darauf hingewiesen, daß diejenigen Augensummen, die auf mehr Arten erzeugt werden können, auch häufiger eintreten als die anderen. Bei Galilei wird dann sogar behauptet, daß die Augensumme 10 häufiger eintritt als die Summe 9. Der Unterschied in der Wahrscheinlichkeit für die Summe 9 bzw. 10 ist allerdings so klein, sodaß bezweifelt werden muß, daß die Spieler am Spieltisch diesen Unterschied bemerkt haben.

Aus heutiger Sicht kann man etwa mit einem x^2-Test prüfen, ob ein bestimmter Würfel als ideal angesehen werden kann, d.h, ob alle Seiten dieselbe Wahrscheinlichkeit haben. Man kann auch die unbekannten Wahrscheinlichkeiten eines nicht gleichmäßigen Würfels aus Wurfserien schätzen. Dieser Zugang ist jedoch mindestens bis zum Gesetz der Großen Zahlen bei Jakob Bernoulli (1714) verwehrt. Dieses Gesetz erst klärte den Zusammenhang von Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit. Demgemäß gab es vorher nur Andeutungen, was mit einem unregelmäßigen Würfel zu machen sei. Man spricht zwar über vorhandene Abweichungen bei realen Würfeln oder Münzen. Einem Versuch, eine Theorie des 'Würfels' aufzustellen, der kein regelmäßiges Hexaeder darstellt, begegnet man selten. Simpson (1740) z.B. versucht, aus der Geometrie eines Parallelepipeds Wahrscheinlichkeiten für die Seitenflächen abzuleiten.

In österreichischen Casinos wird neuerdings ein zum zara-Spiel ähnliches Spiel unter dem Namen 'Sic Bo' angeboten. Es soll chinesischen Ursprungs sein und hat viel mehr Möglichkeiten zu setzen als das mittelalterliche Würfelspiel.

c) Die Münze

Das einfachste und wohl älteste Gerät, das bewußt zur zufälligen Entscheidung zwischen zwei Alternativen verwendet wurde, ist die Münze. Die beiden Seiten einer Münze haben unterschiedliche Namen wie Adler oder Wappen, Kopf oder Zahl. Die Griechen riefen 'Nacht oder Tag', weil sie eine flache, schwarz-weiße Muschel verwendeteten. Die Römer sagten 'capita aut navia', weil ihre wichtigste Münze, der As, auf der einen Seite einen doppelköpfigen Janus und auf der anderen Seite ein Schiff zeigte. Die Franzosen rufen 'pile ou face' (Schrift oder Gesicht), die Engländer 'head or tail' (Kopf oder die umgekehrte, die Kehrseite). Aus der Vielfalt der Bezeichnungen geht hervor, daß auch die Münze schon sehr früh zur Herbeiführung von Entscheidungen verwendet wurde.

Die Zahl der Möglichkeiten aber war auch bei mehreren Münzen gering, die Möglichkeiten waren ferner schlecht zu unterscheiden. Deshalb waren Münzen im Glücksspiel weniger attraktiv. So wurde etwa das kombinatorische Auflisten der Summen im zara-Spiel thematisiert und nicht etwa bei Münzen. Später jedoch wurde auch für den mehrfachen Münzwurf die Diskussion um Beachtung oder Nichtbeachtung der Reihenfolge zu einem beliebten Streitpunkt.

Eine Münze werde zweimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens einmal Wappen erscheint? d'Alembert (1754) hatte folgende Lösung: Der erste Wurf bringt sicher Wappen oder Zahl. Nur im Fall der Zahl ist ein zweiter Wurf überhaupt nötig. Er bringt entweder Wappen oder Zahl. Von den drei Fällen sind zwei günstig, weshalb die gesuchte Wahrscheinlichkeit 2/3 beträgt. Die Argumentation benützt stillschweigend, daß die drei Möglichkeiten gleichwahrscheinlich sind, was jedoch nicht der Fall ist.

d) Das Teilungsproblem (problème des partis)

Das Problem: Spieler A und B vereinbaren eine Serie von 5 Spielen, müssen jedoch beim Stand von 4:3 für A abbrechen. Sie haben nicht die Möglichkeit, an anderer Stelle das Spiel fortzusetzen. Wie haben sie ihren Einsatz aufzuteilen?

Dieses Problem ist kein Glücksspiel an sich. Es hat aber eine gewichtige Rolle in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung gebildet. Frühe Lösungen des Problems gehen am stochastischen Charakter der Situation völlig vorbei. Pacioli (ca. 1514) etwa schlägt vor, den Einsatz im Verhältnis der gewonnenen Partien zu teilen, das ergibt 4/7 des Einsatzes für A. Cardano (1539) bemängelt diese Lösung, die für den Stand 1:0 dem Spieler A nach nur einer einzigen Gewinnpartie alles zubilligt. Seine Lösung ist aber sehr obskur. Das Teilungsproblem ist deswegen so berühmt, weil Pascal und Fermat den Fortgang des Spiels wie ein Glücksspiel behandelt haben. Sie haben es in ihrem Briefwechsel 1654 gelöst und haben damit so etwas wie die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung ausgelöst. Sie verwenden als Teilungskriterium die Wahrscheinlichkeit des Gewinns für die einzelnen Spieler. Sie betrachten also die weitere Fortsetzung des Spiels bis zum Ausgang der Serie (einer erreicht 5 Siege) als stochastischen Prozeß.

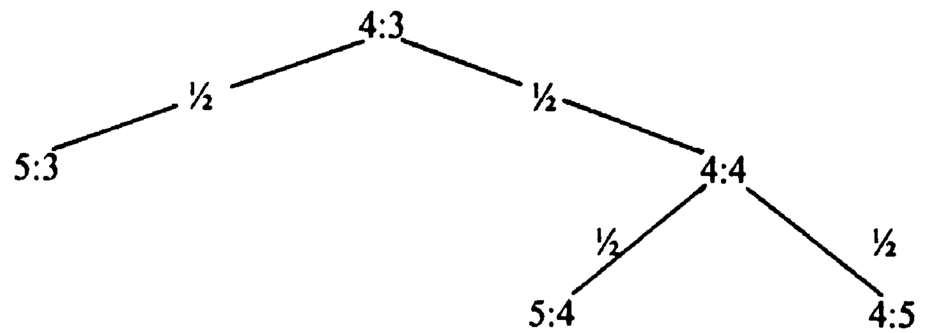

Abb. 3: Baumdiagramm für den hypothetischen Verlauf des weiteren Spiels im Teilungsproblem.

Wenn nun die Wahrscheinlichkeit für A, die gesamte Serie zu gewinnen, ½ + ½.½ = 3/4 beträgt, so sollte er 3/4 des gesamten Einsatzes erhalten. Dieser Ansatz berücksichtigt in gleichem Maße die schon gewonnenen sowie die für den Sieg noch erforderlichen Partien. Die Wahrscheinlichkeit ist in der Folge zu einem natürlichen Maß zur Teilung des Einsatzes geworden.

e) Die Urnen

In ein Gefäß wird eine Anzahl von Kugeln gegeben. Diese Kugeln sind an sich gleich beschaffen mit Ausnahme von Numerierung oder Farbgebung. Die Kugeln werden dann gründlich gemischt, bevor eine Kugel gezogen wird. Im alten Griechenland (etwa in Delphi) wurden Urnen mit weißen und schwarzen Bohnen zur Erstellung von Orakeln verwendet. Dazu wurden eine Reihe von mit ja bzw. nein beantwortbaren Fragen gestellt. Beim Ziehen hat man zu unterscheiden, ob die einmal gezogene Kugel wieder zurück gelegt wird oder nicht.

Paradebeispiel für Urnen sind die Gewinnausspielungen beim Lotto. In Genua wurden anfangs des 17. Jh. zwei der acht Governatoren regelmäßig alle halben Jahre ausgetauscht. Die neuen Mitglieder wurden aus einem Kreis von 120 wählbaren Personen im großen Rat gelost. Seit 1620 sollen Wetten auf die wählbaren Personen bei einem Bankhalter abgeschlossen worden sein. Daraus entwickelte sich das Genueser Lotto 5 aus 90. In der Folge hatte das Lotto in Italien, Preußen und Frankreich Höhen und Tiefen erlebt. Tatsache ist, daß Lotto heute zu den beliebtesten Glücksspielen zählt. Die Attraktivität im Lotto liegt wohl darin, daß man mit geringen Einsätzen relativ viel gewinnen kann.

f) Das Glücksrad - Roulette

Schon die griechische Glücksgöttin Tyche hatte ebenso wie die römische Fortuna ein Glücksrad als Attribut. Anders als bei der Münze kann man verschiedene Gewinnauszahlungen durch die Drehung eines solchen Rades herbeiführen. Das hat man auf Jahrmärkten einst ebenso ausgenützt wie heute in Fernsehspielen. Die kreisrunde Scheibe ist in mehrere Sektoren eingeteilt, die auch unterschiedlich groß sein können. Gedreht kann das Rad oder der Zeiger werden. Die Wahrscheinlichkeit eines Sektors ist, physikalische Symmetrie vorausgesetzt, gleichzusetzen mit dem Anteil des zugehörigen Winkels am gesamten Kreisumfang.

Das Roulette ist ein spezielles Glücksrad mit 37 gleich großen Sektoren; besonders interessant wirkt es wegen der vielen Möglichkeiten zu setzen. Der

Zeiger wird durch eine rollende Kugel ersetzt, der in einer der Vertiefungen am Rande der Kreisscheibe landet. Man sagt, das Roulette sei chinesischen Ursprungs. In Europa hat sich die Idee einer rotierenden Kreisscheibe am Anfang des 18. Jh. festgesetzt. Roulette hat eine wechselvolle Geschichte hinter sich. Erst wurde es von Ludwig XIV. in Frankreich eingeführt, um 1800 war es auch in Deutschland weit verbreitet, speziell in Kurorten. Anfang des 19. Jh. hat sich in Paris die heutige Form herausgebildet. Durch mehrere Skandale wurde es dann 1838 in Frankreich verboten. 1848 wurde Roulette mit Ausnahme von Bad Homburg und Wiesbaden verboten, 1868 wurden alle Spielbanken geschlossen. Erst 1919 wurde in Danzig wieder ein Casino eröffnet; nach dem zweiten Weltkrieg erlebte Roulette eine ungeahnte Renaissance, in Österreich gewinnt dieses Glücksspiel seit 1970 wieder enorm an Bedeutung.

2. Stellenwert von Glücksspielen in Geschichte und Unterricht

a) Warum Urnen oder Glücksspiele im Unterricht?

Die im Unterricht verwendeten Aufgaben kann man in reale, pseudoreale und artifizielle einteilen. Alle Typen haben so ihre eigenen Schwierigkeiten. Reale Probleme haben sehr viele Unbestimmtheiten, sodaß erst eine Reihe von individuellen Festlegungen zu einer Lösung führt. Es gibt keine normative Lösung als Standard und es ist daher schwierig, die gewählten Lösungsschritte mit zugrunde liegenden Konzepten in Verbindung zu setzen.

Der artifizielle Kontext aus Glücksspielen ist in erster Linie dazu gedacht, ein paradigmatisches Beispiel für Begriffe aus der Theorie zu liefern. Die geschilderte Situation soll möglichst störungsfrei eine Verbindung zwischen der abstrakten Theorie und den intuitiven Vorstellungen erlauben. Sie ist jedoch in aller Regel fernab von jeglicher Alltagserfahrung und bedarf daher einer eigenen Erfahrung damit. Wenn ein Lernender diese Erfahrung nicht hat, so wird er die Begriffe im Zusammenhang mit der künstlichen Situation nicht richtig verwenden. Es mag aber durchaus sein, daß er den Begriff in vertrauteren Zusammenhängen sehr wohl passend einsetzt.

Pseudoreale Situationen hingegen müssen erst durch ein geeignetes abstraktes Modell oder durch einen passenden artifiziellen Kontext beschrieben werden.

Dieser Modellierungsprozeß ist zwar nicht so unbestimmt, wie bei wirklich realen Problemen, läßt aber dennoch einige Freiheitsgrade zu, d.h. es sind einige Festlegungen im Ermessen des Problembearbeiters. Dieser Modellierungsprozeß mag aber durch folgende zwei Umstände behindert werden. (i) Das artifizielle Gegenstück ist nicht in der Reichweite des Lernenden. (ii) Der Prozeß der Abbildung ist durch den pseudorealen Kontext gefährdet, weil dieser eine andere, für das Subjekt relevantere Rekonstruktion des Problems wachruft.

Der zweite Fall ist sehr kritisch im Unterricht. Wenn nämlich ein Lernender ein Problem in Abstimmung mit seinem Hausverstand umstrukturiert, so kann das die weitere Kommunikation im Klassenzimmer erschweren, weil seine Antworten dann auf einer anderen Ebene erfolgen als vom Lehrer erwartet. Ein Schüler, der z.B. den Anspruch einer Frage insgeheim als Unsinn abtut, kann sich eigentlich nur in Ersatzstrategien flüchten, die mit dem anstehenden Problem nichts zu tun haben. Wenn er seine Zweifel nicht offen ausspricht, so hat der Lehrer wenig Chancen, den Konflikt zu bemerken.

Es ist von einigem Interesse, daß auch artifizielle Kontexte unerwartete, pseudoreale Züge aufweisen. Das Werfen eines Plättchens oder mehrerer Münzen sowie das Ziehen von Bällen aus einem Sack haben oft überraschende Freiheitsgrade, wie in Borovcnik (1992) ausführlich besprochen wird. Die negativen Auswirkungen von pseudorealen Zügen auf das Problemlöseverhalten werden gemeinhin stark unterschätzt.

Artifizielle Beispiele aus dem Glücksspielbereich geben also ein möglichst störungsfreies Bild von den Begriffen, die ja gerade in solchen Zusammenhängen einst entstanden sind. Ein großer Vorteil von Glücksspielen besteht darin, daß man die verschiedenen Interpretationen von Wahrscheinlichkeit direkt nebeneinander hat. Man kann Anteile als Maß der Erwartung, als Wahrscheinlichkeit (kombinatorisch) bestimmen. Man kann aber auch das Spiel selbst mehrfach durchführen. Die Simulation selbst ist nur möglich, wenn man die grundlegenden Annahmen (Gleichwahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit etc.) durchschaut. Das Ergebnis der Simulation kann dann mit den theoretisch ermittelten Wahrscheinlichkeiten verglichen werden. Späterhin sollte man jedoch die Begriffe erweitern und auf andere Bereiche anwenden, wie dies auch historisch der Fall war.

Damit werden Glücksspiele zu einem dynamischen Bild der Theorie. Sie dienen als Mittler zwischen schwammigen intuitiven Vorstellungen und der klaren mathematischen Festlegung der Begriffe. In einem gewissen Sinn sind Glücksspiele ein Medium, um intuitive Ideen formulieren und anderen mitteilen zu können. Wegen ihrer Klarheit kann man sie auch als Vergleichsstandard verwenden, d.h. man bildet einen realen Kontext auf ein passendes 'Glücksspiel' ab, um die anstehenden Fragen zu klären.

b) Historisch langsame Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Die Würfel aus Ton, nicht die aus Knochen, erreichten bereits im alten Babylon eine ausgezeichnete Anpassung an die geometrische Symmetrie. Die große Erfahrung im Glücksspiel läßt die Frage offen, warum in der Antike so gar keine Ansätze für die Analyse solcher Spiele vorhanden sind. i) Der zufällige Charakter von Glücksspielen wurde überhaupt nicht erfaßt. ii) Es gab keinerlei Ansätze dazu, die statistische Regelmäßigkeit zu erkennen; das Einpendeln relativer Häufigkeiten bei zunehmender Serie wurde demzufolge auch nicht analysiert. iii) Es wurden keinerlei Anstalten gemacht, die Unsicherheit in Form der Zahl der Möglichkeiten zu gewichten; auch nicht vergleichend im Sinne von, was mehr Möglichkeiten hat, ist auch wahrscheinlicher. Ineichen (1986) führt dazu eine Reihe von Gründen an, u.a stellt er fest:

Gottesentscheid und antike Philosophie. Neben den beinahe symmetrischen Würfeln aus Ton wurden weiter Würfel aus Knochen verwendet. In erster Linie wurden Astragali, Würfel und Lose im alten Griechenland und in Rom als Mittel zur Divination, zur Erforschung des göttlichen Willens, allenfalls auch zur Erforschung der Zukunft, verwendet. Auch im Glücksspiel, wenn es um große Geldbeträge ging, war das Ergebnis des Wurfes ein Gottesentscheid. Wenn man mangels Geld sein eigenes Leben einsetzte und verlor, so ging man frohen Mutes in die Sklaverei, denn Gott hatte so entschieden. Was hätte man aus dieser Auffassung von Glücksspielen heraus eigentlich erforschen sollen?

Die geometrische Symmetrie war weder das Ziel der verwendeten Würfel noch das Ziel von Analysen über Würfel. Eine perfekte Symmetrie kam doch nur den Gestirnen und Gott selbst zu, nicht jedoch Dingen, die vom Menschen erschaffen waren. Ein systematisches Experimentieren zur Ergründung einer statistischen Regelmäßigkeit war demnach ganz gegen die Philosophie der Griechen.

Darüberhinaus wurde der zufällige Gehalt der Glücksspiele mit dem Durchsetzen der christlichen Religion und Philosophie endgültig 'absurd': Nach St. Augustin wird alles Geschehen minuziös von Gott geplant und kontrolliert. In einem solchen Denken ist kein Platz für den Zufall.

Allgemeiner begrifflicher Fortschritt. Allerdings muß man den wirklichen Fortschritt, wenigstens was die begriffliche Durchdringung anbelangt, auch in anderen Disziplinen etwas kritischer unter die Lupe nehmen. In der Geometrie formten die Elemente Euklids kein Axiomensystem im heutigen Sinn, sondern waren eine bloße Zusammenfassung von grundlegenden Eigenschaften. Insbesondere war die Stellung des Parallelenaxioms überhaupt nicht geklärt. Fortschritte diesbezüglich ließen bis auf das Ausformulieren nichteuklidischer Geometrien bei Gauß und Lobatschewski warten. Mit kausalem Denken, das heute so tief und intuitiv verankert ist, hatte man auch lange Zeit Probleme; es sei nur auf die Schwierigkeiten hingewiesen, die Galilei mit der Durchsetzung seiner Theorie hatte.

Gottesentscheid und der nächste Wurf. Eine ganz wesentliche Hürde für einen frühen Beginn der Wahrscheinlichkeitsrechnung mag jedoch wohl in folgendem liegen: Angesichts einer Situation unter Ungewißheit, die von Würfeln oder Astragali 'bestimmt' wird, angesichts der schicksalsträchtigen Bedeutung einer (göttlichen) Entscheidung, war man nicht an einer Spekulation interessiert, was sich in einer längeren Serie ereignen würde. Was zählte, war der Augenblick, der *nächste* Wurf. Darüber kann keine Voraussage von Menschen präzise Auskunft geben. Um hier einen begrifflichen Fortschritt zu erzielen, mußte man erst den nächsten Ausgang in eine Reihe zukünftiger (hypothetischer) Ausgänge einordnen. Nur diese Umformulierung macht das Problem der Voraussage einigermaßen behandelbar.

Es wird jedoch eigentlich ein Ersatzproblem gelöst, das die ursprüngliche Frage nur indirekt beantwortet. Im Zusammenhang mit einem Münzwurf heißt das, daß man nur *Gewichte* für die Möglichkeit des Auftretens von Kopf oder Zahl in Form von Wahrscheinlichkeiten angibt. Daraus kann man zwar ableiten, ob etwa ein bestimmter Wetteinsatz fair ist oder nicht, man kann aber keine 'präzise' Voraussage gewinnen, welche Seite obenauf liegen wird. Ein allzu häufiges Mißverständnis um die Möglichkeiten der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist auch heute noch mit der Aussage 'den Zufall berechenbar machen' verbunden. Man kann mit Wahrscheinlichkeitsrechnung Entscheidungen (als besser) bewerten, aber nicht das tatsächliche Ergebnis genau und sicher vorhersagen.

c) Verschiedene historische Ansichten zur Wahrscheinlichkeit

Zahl der Möglichkeiten als Maß der Erwartung. In der Antike fehlt ein Bewußtsein für die statistische Regelmäßigkeit des Zufalls. Auch ein Gewichten der Unsicherheit mittels Anteilen in symmetrischen Situationen kommt erst in 'De Vetula' (2. Hälfte des 13. Jh.) bzw. im Kommentar zu Dantes 'Comedia' (ca. 1325) vor.

Cardano (1563) spricht dann schon bewußt von einem regelmäßigen, idealen Würfel. Seine Überlegungen sind von einer Durchmischung von Wahrscheinlichkeit und Erwartungswert gekennzeichnet. In Liber de Ludo Aleae behauptet Cardano, daß man darauf setzen könne, daß nach spätestens drei Würfen mit einem Würfel die Sechs erscheine. Alle Zahlen sollten in einem Kreis von 6 Würfen einmal erscheinen. Cardano kannte natürlich die kombinatorischen Überlegungen aus 'De Vetula'. An späterer Stelle bemerkt er seinen Fehler bezüglich der 6 in 3 Würfen, denn es sind ja 125 der möglichen 216 Ergebnisse ohne 6, nur die restlichen 91 enthalten mindestens eine 6.

Die kritische Zahl für das Erscheinen einer Doppelsechs bei einem Wurf mit zwei Würfeln konnten einige mathematisch Interessierte ermitteln. Darunter auch de Méré, der aber ob des Ergebnisses mit der Mathematik mehr als unzufrieden war und sich damit an Pascal wandte, was den berühmten Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat im Jahre 1654 auslöste. Zum Problem von de Méré wird später im Zusammenhang mit dem Erwartungswert noch etwas ausgesagt werden.

Günstige durch mögliche. Pascal und Fermat gaben noch nicht die klassische Definition als 'günstige durch mögliche', berechneten aber stillschweigend solche Wahrscheinlichkeiten. Sie verwendeten nur bewußt, was sich seit 'De Vetula' nach und nach herauskristallisiert hatte, nämlich daß der Anteil an allen Möglichkeiten ein vernünftiges Maß der Erwartung darstellt. Sie verwendeten die Regel pragmatisch ohne zu klären, wann die einzelnen Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind. Das war für sie auch nicht nötig, denn sie bezogen sich auf Glücksspiele, wo dies offensichtlich kein Problem macht.

Erwartungswert. Huygens verwendete als Grundbegriff wieder den Erwartungswert und konnte so alle anstehenden Probleme rekursiv lösen, ohne daß er die kombinatorischen Hilfsmittel zur Bestimmung der günstigen und möglichen verfeinerte. Huygens (1657, 62-66) formuliert folgende Sätze über den Erwartungswert:

> "Proposition 1: Wenn ich gleiche Chancen habe, den Betrag a bzw. b zu erlangen, so ist das ebensoviel wert für mich wie $(a+b)/2$.
>
> Proposition 3: Wenn die Zahl der Chancen gleich p ist, den Betrag a zu erlangen, und die Zahl der Chancen gleich q ist, den Betrag b zu erlangen, so ist das für mich gleich viel wert wie $(pa + qb)/(p+q)$, vorausgesetzt, daß alle Chancen, die auftauchen, gleich leicht sind."

Heute stellen diese Sätze die Definition der mathematischen Erwartung dar; Huygens muß sie jedoch in seinem Verständnis beweisen. Er führt den Beweis, indem er das Ausgangsspiel mit einer Lotterie modelliert, in der er so viele Lose fingiert wie die Anzahl der gleichen Chancen beträgt. Auf jedes Los entfällt ein Mitspieler, der vor dem Spiel einen noch zu berechnenden Einsatz x bezahlt, dieser Betrag x ist Huygens 'Wert des Spiels'.

In Proposition 3 hat man folgende äquivalente Lotterie: Mich eingeschlossen, gibt es $p+q$ Spieler sowie $p+q$ Lose mit gleichen Chancen. Mit den q Spielern treffe ich die Vereinbarung, daß ich den Betrag b an sie auszahle, falls ich gewinne, und, daß sie umgekehrt den Betrag b an mich auszahlen, falls sie gewinnen. Mit den verbleibenden $p-1$ Spielern treffe ich diese wechselseitige Vereinbarung mit dem Betrag a. Setzt jeder Spieler den Betrag x, so habe ich folgende Chancen:

1	Chance auf	Betrag	$(p+q)x - (p-1)a - qb$
$p-1$	Chancen auf	Betrag	a
q	Chancen auf	Betrag	b

Damit das Spiel zum ursprünglichen äquivalent wird, muß die eine Chance mit $(p+q)x - (p-1)a - qb$ gleich der einen Chance mit a sein, also muß gelten:

$$(p+q)x - (p-1)a - qb = a$$

oder

$$x = \frac{pa + qb}{p + q}$$

Huygens wurde zu dieser Begriffsbildung mit dem Wert eines Spiels durch den Umstand angeregt, daß in vielen praktischen Anwendungen das arithmetische Mittel als geeignet betrachtet wurde. In der Tat, Huygens spricht nicht vom Erwartungswert, ein Ausdruck, der aus der lateinischen Übersetzung seines Buches von F. v. Schooten stammt. Er verwendet vielmehr den Ausdruck 'wahrer Wert der Auszahlungstabelle'. Wahrscheinlichkeit spielt für Huygens die Rolle eines undefinierten Grundbegriffs, welcher durch Verweis auf symmetrische Glücksspiele gerechtfertigt schien.

Vermischung von Erwartungswert und Wahrscheinlichkeit. Jetzt kommen wir auf das Problem von de Méré zurück; es soll die Methode von Huygens demonstrieren, die begrifflich ganz einfach ist.

Welches der beiden folgenden Spiele ist vorzuziehen? In Spiel 1 gewinnt der Spieler, falls es mindestens eine 'Sechs' in vier Würfen mit einem Würfel gibt; in Spiel 2 gewinnt der Spieler, falls es mindestens eine 'Doppel-Sechs' in 24 Würfen mit zwei Würfeln gibt. In der Huygenschen Formulierung lauten die Fragen:

> Proposition 10: Es ist herauszufinden, wie viele Würfe man machen soll, um einen Sechser mit einem Würfel zu erhalten.
> Proposition 11: Es ist herauszufinden, wie viele Würfe man machen soll, um einen Doppel-Sechser mit zwei Würfeln zu erhalten.

Gemeint ist mit der Frage, wie viele Würfe man machen soll, damit man *bessere* Chancen hat, *wenigstens einen* Sechser (oder Doppel-Sechser) zu erhalten als *keinen*. Gleiche Chancen beim Setzen auf ein Ereignis E zu haben, bedeutet ein Chancenverhältnis W(E) : W($\bar{E}$) von 1:1. Daher rühren auch die Sprechweisen 'die Chancen stehen fifty-fifty' oder im Englischen 'an even chance'. Mit Erwartungswerten rechnet man so: Der Spieler wettet auf 'mindestens einen Sechser in n Würfen', der Betrag t steht auf dem

Spiel. Die Gewinnerwartung sei mit e_n bezeichnet. Für n=1 man hat *eine* Chance auf t und *fünf* Chancen auf 0; das ergibt nach Proposition 3:

$$e_1 = \frac{1 \cdot t + 5 \cdot 0}{6} = \frac{1}{6}t$$

Rekursiv gilt:

$$e_{n+1} = \frac{1 \cdot t + 5 \cdot e_n}{6} = \frac{1}{6}t + \frac{5}{6}e_n$$

Im (n+1)ten Wurf hat man ja *eine* Chance auf den Betrag t (man bekommt den Sechser in diesem Wurf), *fünf* Chancen entfallen auf den Wert e_n, den Wert des Spiels der ersten n Würfe (daß man den Sechser schon in den ersten n Würfen bekommt). Typisch für Huygens ist die rekursive Prozedur zur Berechnung der Gewinnerwartung, der Reihe nach ergeben sich:

$$e_2 = \frac{1}{6}t + \frac{5}{6}e_1 = \frac{1}{6}t + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}t = \frac{11}{36}t$$

$$e_3 = \frac{91}{216}t \qquad e_4 = \frac{671}{1296}t$$

Für n=4 ergibt sich daher ein Chancenverhältnis von 671 zu 625, das ist besser als gleiche Chancen. Für den Wurf mit zwei Würfeln muß Huygens die rekursive Prozedur durch Zusammenfassen mehrerer Runden abkürzen. Er erhält für n=24 etwas schlechtere Chancen als 1:1, für n=25 etwas bessere.

Die Regel 'günstige durch mögliche' wird mit dem Huygenschen Werts eines Spiels ganz einfach begründbar: Hat man g Chancen auf den Betrag 1 (Gewinn) und m-g Chancen auf den Betrag 0 (Verlust), so ist der Wert des Spiels

$$\frac{g \cdot 1 + (m-g) \cdot 0}{g + (m-g)} = \frac{g}{m}$$

In diesem speziellen Fall wird der Wert des Spiels zur Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen; Huygens hätte natürlich vom Wahrscheinlichkeitsverhältnis g : (m-g) gesprochen.

Das Problem von de Méré zeigt auch, wie das damalige Denken von einer eigenartigen Verflechtung von Wahrscheinlichkeit und Erwartungswert geprägt war, was häufig zu Mißverständnissen führte, wenn man die Begriffe nicht sauber trennte (und wie sollte man das).

Empirische Wahrscheinlichkeiten. Huygens behandelte relative Häufigkeiten wie Wahrscheinlichkeiten und erstellte damit Sterbetafeln und führte den Begriff der mittleren Lebenserwartung ein. Dieser pragmatische Zweig der Statistik wurde besonders in England aufgegriffen. Die Leistung von Graunt (1662) liegt in seiner 'Abzählung' des Grundraumes der Bevölkerung von London, die dem Risiko verschiedenster Krankheiten ausgesetzt war, welche in den 'Bills of Mortality' aufgezeichnet wurden. Dies gab den Anstoß zur detaillierteren Erfassung von demographischen Statistiken und Sterbetafeln.

Während nun die Staatenkunde besonders in England ihren Aufschwung nahm und man eifrig empirische Wahrscheinlichkeiten berechnete, bemühte man sich auf dem Kontinent sehr darum, das Verhältnis von diesen Häufigkeiten zu Wahrscheinlichkeiten zu klären. Ein begrifflicher Fortschritt wurde erst mit Jakob Bernoulli (1714) erreicht. Sein Gesetz der Großen Zahlen zeigt, in welchem Sinn die relativen Häufigkeiten gegen die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeit konvergieren. Der Satz rechtfertigt, den Begriff Wahrscheinlichkeit auch über das Glücksspiel hinaus anzuwenden, also auch dann, wenn Symmetrieargumente fehlen.

In der Beweisführung verwendet Bernoulli ausführlich kombinatorische Hilfsmittel, die er systematisch entwickelt. Begrifflich steht Bernoulli noch an einer anderen Wende, insofern nämlich als er endgültig die Erwartung bei Huygens durch die Wahrscheinlichkeit als den grundlegenderen Begriff ersetzt. Philosophisch jedoch hat auch er keine Fortschritte gemacht, seine Ideen sind nach wie vor einem metaphysischen Determinismus verhaftet, wonach alles durch deterministische Gesetze bestimmt wird - das Wetter, Würfel oder die Bahnen der Planeten in gleicher Weise. Zufall kommt nur durch unser eingeschränktes Wissen um diese Gesetze ins Spiel. Die meisten Phänomene sind so komplex, daß es witzlos wäre, die möglichen Fälle zu studieren. Jedoch kann er, nachdem er 'sein Theorem' bewiesen hat, feststellen: Ein anderer Weg wird uns das bringen, wonach wir suchen, und uns ermöglichen, wenigstens a posteriori das zu erkennen, was wir a priori nicht bestimmen können, d.h. aus den Ergebnissen, die in zahlreichen ähnlichen Versuchen beobachtet wurden.

Erste Definition. Laplace's Arbeit markiert einen Höhepunkt in der frühen Begriffsbildung der Wahrscheinlichkeit durch seine Grundlegung und durch wichtige mathematische Sätze wie den Zentralen Grenzverteilungssatz. Philosophisch jedoch waren seine Ansichten noch immer auf einem mechanischen Determinismus gegründet. Für ein intelligentes Wesen, das alles verstehen könnte (der spätere 'Laplacesche Dämon') wäre nichts ungewiß, weder die Vergangenheit noch die Zukunft. Wahrscheinlichkeit ist auch für Laplace ein Mittelding zwischen unserer Unwissenheit und unserem Wissen (Laplace 1814 bzw. 1951, 4-6).

Laplace (1812) gibt die erste formale Definition von Wahrscheinlichkeit, die sogenannte klassische Wahrscheinlichkeit. Danach ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Quotienten von der Anzahl aller für das Ereignis günstigen Ausfälle und der Anzahl aller möglichen Ausfälle. Die Definition erfordert zu ihrer Anwendung stillschweigend, daß die einzelnen Ausfälle gleich wahrscheinlich sind. Laplace formulierte das sogenannte Prinzip des unzureichenden Grundes, um diese Annahme zu überprüfen. Nach diesem Prinzip sollten die Ausfälle gleichwahrscheinlich sein, falls man keinerlei Grund hat anzunehmen, daß irgendeiner der Ausfälle wahrscheinlicher eintritt.

Diese erste formale Definition konnte also das Wesen von Wahrscheinlichkeit überhaupt nicht klären, da es sich auf ein philosophisch obskures Prinzip zu seiner Anwendung bezieht. Ein weiterer Schwachpunkt bei Laplace war, daß er sich damit auf einen sehr engen Bereich einschränkte, der weit weg von den tatsächlichen empirischen Anwendungen war. Die folgenden Versuche, sein Prinzip zu retten, waren nicht sehr erfolgreich. Der Versuch, die Gleichwahrscheinlichkeit von Ausfällen in *objektiver* Weise zu repräsentieren, verursacht Schwierigkeiten. Ein Ansatz bestand darin, auf physikalische Symmetrien des zugehörigen Zufallsexperimentes auszuweichen. Etwa sollte die physikalische Symmetrie eines Würfels zur Gleichwahrscheinlichkeit aller Augenzahlen führen. Es gibt jedoch viele plausible physikalische Symmetrien (z.B. für den zweifachen Wurf eines Würfels), sodaß man eine objektive Prozedur benötigt, um die richtige Symmetrie auszuwählen.

Rückschläge. Es gab auch weitere Probleme, die sowohl einen begrifflichen Fortschritt behinderten als auch das Ansehen der jungen Disziplin schädigten.

Das St. Petersburg-Paradoxon zeugt auch von den komplizierten Beziehungen zwischen Wahrscheinlichkeit und Erwartungswert. Zwei Spieler *A* und *B* werfen eine Münze, bis diese zum ersten Mal 'Kopf' zeigt. Wenn das beim *n*ten Wurf passiert, so hat Spieler *B* den Betrag von DM 2^n an Spieler *A* zu bezahlen. Welchen Betrag sollte *A* vor dem Spiel an *B* bezahlen, damit die Bedingungen fair sind.

Bezeichne X den Betrag, den Spieler *B* zu bezahlen hat, dann ist der Grundraum für X (wenigstens theoretisch) die Menge der natürlichen Zahlen. Der erwartete Gewinn E(X) existiert aber nicht, weil die entsprechende Reihe divergiert:

$$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + \ldots + 2^n \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Daher sollte Spieler *A* einen unendlich großen Betrag an *B* bezahlen müssen, bevor das Spiel beginnt. Huygens hat den erwarteten Wert als fairen Preis einer unsicheren Unternehmung eingeführt. Die Wahrscheinlichkeit einer langen Serie ist sehr klein und geht gegen Null. Dennoch ist die erwartete Auszahlung unendlich. Niemand wollte oder könnte an so einem Spiel teilnehmen, denn der wirkliche Auszahlungsbetrag ist *beschränkt*. Eine weitere Überlegung mag noch mehr verwirren. Die erwartete Dauer des Spieles ist $1/(½) = 2$, was zu einer anderen erwarteten Auszahlung von $2^2 = 4$ führt. Diese zwei Werte von 4 und Unendlich stehen für dasselbe Spiel und zeigen, wie schwierig sich eigentlich die Beziehungen zwischen Wahrscheinlichkeit und Erwartungswert gestalten. Sie legen aber auch nahe, daß mit der dahinter stehenden Theorie etwas nicht in Ordnung sein könnte.

Um das Paradoxon zu lösen, schlug D. Bernoulli vor, den Nutzen des Geldes und nicht die Auszahlung in Geld selbst zu mitteln. Er zog eine logarithmische Funktion zur Beschreibung des Nutzens heran und konnte damit eine endliche und intuitiv akzeptable *moralische Erwartung* als fairen Einsatz im Spiel ableiten. Dieses Konzept der moralischen Erwartung fand viel Unterstützung von Buffon, Condorcet, Laplace oder Poisson, aber die Zeit war einfach nicht reif, um die spezielle Wahl der Nutzenfunktion als eines von mehreren möglichen mathematischen Modellen zu begreifen.

Neue Anwendungsgebiete. Trotz dieser philosophischen Schwierigkeiten und trotz mancher sorgloser Anwendung von Wahrscheinlichkeit im Gefolge des

Prinzips des unzureichenden Grundes bekam Wahrscheinlichkeit eine wichtige begriffliche Rolle in der Physik in den letzten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts. Einige der neuen physikalischen Gesetze konnten nur mit Hilfe von Wahrscheinlichkeiten formuliert werden (z.B. der zweite Hauptsatz der Thermodynamik). In der Vererbungslehre spekulierte Mendel (1865) über kleinste Teilchen als Träger der Erbinformation in den Samen der Elterngeneration. Diese Teilchen geben nun nach Gesetzen der Wahrscheinlichkeit das Erbgut an die Tochtergeneration weiter. Seine Überlegungen konnten erst 1930 mit Hilfe des Elektronenmikroskops belegt werden. Andererseits fand der empiristische Zweig von Wahrscheinlichkeit einen frühen Höhepunkt in der Biometrie, insbesondere in der Weiterentwicklung der Methoden von Regression und Korrelation.

Wahrscheinlichkeit wurde sowohl als theoretisches Konzept (als Entropie in der Physik) als auch als empirischer Begriff (als relative Häufigkeit) verwendet. Diesen Entwicklungen stand der Umstand entgegen, daß noch immer keine befriedigende Grundlage für den Wahrscheinlichkeitsbegriff geschaffen war. Der einzige Versuch von Laplace hatte seine speziellen Schwierigkeiten; was aber besonders schmerzlich war, er hatte mit den laufenden Anwendungsgebieten eigentlich nichts mehr zu tun. Auf dem Mathematiker-Kongreß in Paris 1900 formulierte Hilbert ein Programm für die mathematische Forschung, in welchem er auch eine befriedigende Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitstheorie und statistischen Mechanik (man beachte die Nähe zur Physik!) als eine der vordringlichsten Aufgaben ansah.

Axiomatische Grundlegung. R. v. Mises (1919) war einer der Pioniere der Axomatisierung. Die Interpretation von Wahrscheinlichkeit als relativer Häufigkeit und die Konvergenz der relativen Häufigkeiten im Theorem von Bernoulli formten die Grundlage für seine Forschung. Er definiert Wahrscheinlichkeit als Grenzwert relativer Häufigkeiten auf Kollektiven. Er braucht dazu ein Axiom der Regellosigkeit für diese relativen Häufigkeiten. Die 'Regellosigkeit' von Folgen stellte einerseits ein philosophisch obskures Konzept dar und war andererseits in praktischen Fällen nicht zu überprüfen. Die zugrunde liegende Konvergenz hat also nichts mit der gewöhnlichen Konvergenz aus der Analysis zu tun, sondern muß selbst wiederum auf Wahrscheinlichkeiten zurückgreifen (siehe das Bernoullische Gesetz der Großen Zahlen). Der Ansatz gerät dabei in logische Schwierigkeiten. Diese hat man zwar heute aufgeklärt. Übrig bleibt, daß die inhaltliche Rückführung von Wahrscheinlichkeit auf relative Häufigkeiten zu kompliziert ist.

Es war dann Kolmogoroff (1933) vorbehalten, Hilberts Problem zu lösen. Sein System von Axiomen ließ die bekannten Sätze ableiten und wurde unmittelbar anerkannt. Sein Ansatz markiert einen Höhepunkt maßtheoretischer Argumente, welche zuvor im Bemühen der Verallgemeinerung der Zentralen Grenzverteilungssätze in der russischen Schule an Bedeutung gewonnen hatten. Damit wurde allerdings nicht geklärt, was Wahrscheinlichkeit ist, sondern es wurde nur herausgearbeitet, welche Eigenschaften *strukturell* Wahrscheinlichkeit auszeichnen. Die Interpretation des Konzeptes bleibt eine offene Frage, wenngleich der Ansatz in erster Linie dazu gedacht war, die Häufigkeitsdeutung zu rechtfertigen.

3. Exemplarische Behandlung von Glücksspielbereichen

a) Lotto

Regeln: Die Spieler kreuzen in einem Feld eines Spielscheines 6 Zahlen aus den 45 angegebenen an. Gezogen wird am Samstag abend öffentlich im Fernsehen und zwar mittels eines raffinierten technischen Apparats, wo in einer großen Kugel sich die 45 mit den Zahlen versehenen Kugeln befinden. Gas wird durchgeblasen, die Kugel, die als erste in den Sog gerät, wird von einem Trichter aufgefangen. Der Vorgang wiederholt sich noch fünf weitere Male, dann sind die sechs Gewinnzahlen bestimmt; eine weitere Ziehung bestimmt die sogenannte Zusatzzahl. Wer auf seinem Spielschein alle 6 Zahlen richtig vorausgesagt hat, hat einen 'Sechser' und kann mit einem sehr hohen Gewinn rechnen. Sind wenigstens drei Übereinstimmungen, so hat man auch gewonnen, allerdings ist die Gewinnsumme entsprechend niedriger. Für die Feststellung des Gewinns sind nur die Zahlen selbst wesentlich, nicht jedoch die Reihenfolge, in der diese gezogen wurden. Das Lotto ist wie Ziehen ohne Zurücklegen aus einer Urne; allerdings sind die Kugeln mit den Zahlen von 1 bis 45 (49 in BRD) beschriftet.

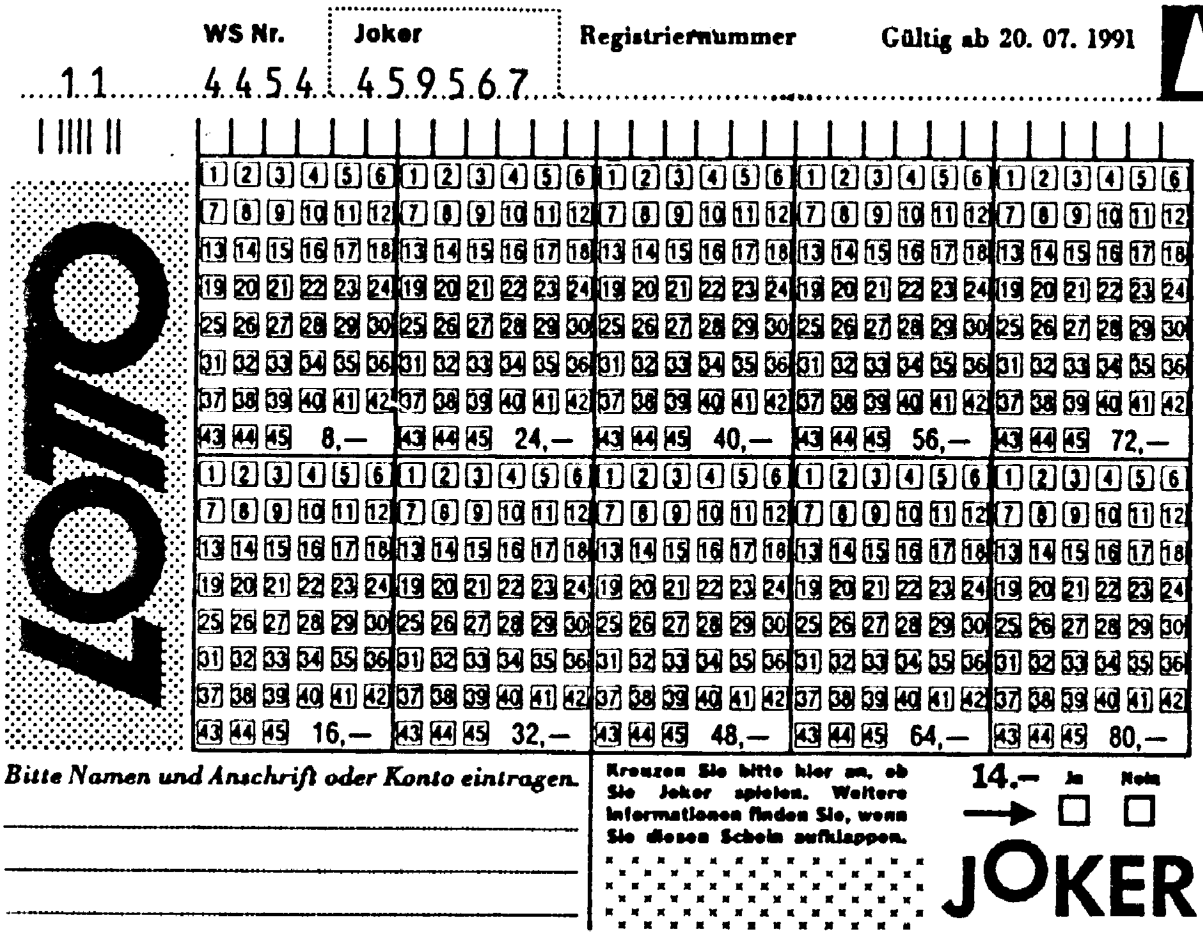

Abb. 4: Teilnahmeschein beim Lotto 6 aus 45 in Österreich.

Gewinnklasse	Ereignis	Anteil am Gewinntopf %
I	6	30
II	5 mit Zusatz	10
III	5 ohne Zusatz	15
IV	4	20
V	3	25

Die Hälfte der Einsätze wird abgezweigt, der Rest wird in etwa proportional zu den Gewinnchancen aufgeteilt. Beim Roulette gibt es das Wort "der Spieler hat die Bank gesprengt", beim Lotto aber kann die ausgezahlte Summe nie höher sein als der Einsatz. Mit dem Gewinn deckt die Lottogesellschaft ihre Kosten; die verbleibenden Beträge werden nach einem bestimmten Schlüssel als Förderungen für Kultur und Sport verteilt.

Wahrscheinlichkeiten: Alle Berechnungen kann man mit Hilfe kombinatorischer Methoden durchführen, manchesmal hilft eine geschickte Umformulierung. Zur Illustration sei die Wahrscheinlichkeit für einen Fünfer ohne bzw. mit Zusatzzahl berechnet. Mit diesen Wahrscheinlichkeiten kann man dann mit gar nicht so einfachen Zusatzüberlegungen den Erwartungswert pro eingesetzten Schilling mit 0,50 S ableiten; dasselbe Ergebnis erhält man auch durch eine naive Überschlagsrechnung, weil ja nur 50% der Einsätze in den Gewinntopf wandern. Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten ist folgende Einkleidung recht günstig: Die 6 Zahlen von dem einen Tip auf dem Wettschein seien schwarz angemalt, die restlichen 39 seien weiß. Die Lotto-Ziehung kann dann als gewöhnliches Ziehen aus einer Urne mit 39 weißen und 6 schwarzen Kugeln ohne Zurücklegen modelliert werden. Gefragt ist die Wahrscheinlichkeit für 6, 5 usf. schwarze Kugeln unter den 6 gezogenen. Für den Fünfer (ohne Berücksichtigung der Zusatzzahl) hat man daher:

$$g = \text{günstige} = \binom{6}{5}\cdot\binom{39}{1}$$

$$m = \text{mögliche} = \binom{45}{6}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit W ist g/m. Für den Fünfer mit Zusatzzahl sind mehrere Wege zur Berechnung interessant:

- o direkt: g/m mit

$$g = \binom{6}{5}\cdot\binom{39}{1}\cdot 1 \qquad m = \binom{45}{6}\cdot 39$$

- o bei 7 gezogenen Kugeln 6 schwarze, aber nicht schon bei 6 Kugeln 6 schwarze:

$$\frac{\binom{6}{6}\cdot\binom{39}{1}}{\binom{45}{7}} - \frac{\binom{6}{6}\cdot\binom{39}{0}}{\binom{45}{6}}$$

- o in zwei Stufen (nicht zeitlich), die Zusatzzahl muß getroffen sein, aus den restlichen 5 schwarzen müssen alle fünf in der Hauptziehung gezogen werden.

$$\frac{6}{45} \cdot \frac{\binom{5}{5} \cdot \binom{39}{1}}{\binom{44}{6}}$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Fünfer ohne Zusatzzahl ergibt sich dann als Differenz von Fünfer allgemein und Fünfer mit Zusatzzahl.

Strategien: Warum soll man spielen? Warum spielen so viele Leute beim Lotto? Hohe Gewinne locken; man kann dies rational damit begründen, daß die Leute ihre Gewinne und Verluste nach einer nicht-linearen Nutzenfunktion beurteilen. Danach sind kleine Verluste vernachlässigbar, die extrem hohen Gewinne dagegen bringen noch mehr Nutzen, da sie ein völlig anderes Leben ermöglichen. Man kann die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, nicht verbessern, da hilft auch die beste Strategie nichts.

Man kann jedoch versuchen, im Falle eines Gewinnes den ausbezahlten Betrag zu erhöhen. Dazu gibt es gut begründbare Strategien. Einerseits kann man durch Systemspiele erreichen, daß mit einem Sechser automatisch mehrere Fünfer zusätzlich zur Auszahlung gelangen. Andererseits kann man versuchen, im Falle des Sechsers der einzige Gewinner zu sein. Dazu muß man vermeiden, dasselbe zu tippen wie die Mitspieler. Da Menschen bestimmte Zahlenkombinationen bevorzugen, kann man hier tatsächlich seine Lage verbessern. Es sei nocheinmal festgehalten: nicht die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, kann man beeinflussen, sondern nur die Höhe des Gewinnes, *falls* man gewinnt.

Typische Fehlvorstellungen: Was schon einmal gezogen worden ist, kann nicht oder nur mit geringerer Wahrscheinlichkeit wieder kommen, ist eine typischen Fehleinschätzung. Eine andere Fehleinschätzung ist: Welche einzelnen Zahlen schon lange nicht gezogen worden sind, haben nun eine höhere Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden; im Schnitt 'müssen' ja alle Zahlen gleich häufig kommen. Manchen meinen, daß Zahlen mit denen man gewonnen hat, oder Zahlen, zu denen sie irgendeine persönliche Beziehung haben, ihre Glückszahlen sind. Andere wiederum liegen einer Repräsentationsfalle auf, wenn sie meinen, daß eine Folge 1, 2, 3, 4, 5, 6 weniger wahrscheinlich ist als irgendeine spezielle bunte Folge. Klar, es gibt mehr von den bunten, also tauchen oft auch solche auf. Aber, wenn man spielt, so muß man sich für eine spezielle bunte oder symmetrisch gebaute entscheiden. Diese eine Serie hat dieselbe Wahrscheinlichkeit, egal, wie sie aussieht. Allerdings kann man mit bunten Folgen vermeiden, daß andere Spieler dieselbe Folge tippen, was die Höhe eines allfälligen Gewinnes beeinflussen kann.

Charakterisierung des Spieles: Enorm hohe Gewinne verlocken zum Mitspielen. Die Einsätze sind vergleichsweise gering, ebenso die Gewinnchancen. Die Spieler gewinnen selten, es ist daher von hoher Wichtigkeit, ihnen die jeweiligen Gewinner so persönlich wie möglich vorzustellen. Wenn auch die Identität gewahrt werden muß, so wird doch versucht, die Gewinner zu personalisieren (wieder hat ein Kärntner ...). Auch die Höhe der Gewinne muß werbemäßig ausgeschlachtet werden. Es gibt kein anderes Glücksspiel, das staatlich gestützt wird, das so unfair ist wie Lotto, denn die Gewinnerwartung beträgt nur 50% des Einsatzes. Die Möglichkeit jedoch, mit einem Haupttreffer sein Leben verändern zu können, läßt die Leute spielen.

Aufgaben und Bemerkungen: Die folgenden Aufgaben illustrieren einige weitere wesentliche Fragestellungen beim Lotto, Lösungen findet man u.a. in Gundel (1987).

Aufgabe: Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die verschiedenen Gewinnkombinationen, also für einen Sechser, einen Fünfer mit Zusatzzahl, einen Fünfer (ohne Zusatzzahl), einen Vierer sowie für einen Dreier auf einem Wettschein mit einem Tip.

Aufgabe: Beim Teilungsproblem wurde davon gesprochen, daß die Gewinne nach der Gewinnwahrscheinlichkeit aufgeteilt werden sollen. Bestimmen Sie daher, wieviel auf die verschiedenen Gewinnmöglichkeiten entfallen sollte. Geben Sie die Gewinne in Prozent der Einsätze an. Hinweis: Zweier und Einser bekommen nichts ausgezahlt.

Aufgabe: Bestimmen Sie den mittleren Gewinn pro Schilling Einsatz beim Lotto 6 aus 45.

Aufgabe: Geben Sie eine ausführliche Begründung an, warum es 'vernünftig' sein kann, am Lotto-Spiel teilzunehmen. Hinweis: Während die Lotto-Gesellschaft alle Überlegungen in Geld anstellt, scheint es für Spieler vernünftig, die Betrachtungen in Einheiten von Nutzen anzustellen. Danach ist der entgangene Nutzen (Verlust) bei wenigen Tippreihen vernachlässigbar klein; der Nutzen des Sechsers hingegen reicht weit über den Geldbetrag hinaus.

Aufgabe: Systemspiele ersparen das Ausfüllen vieler Wettscheine. Sie suggerieren jedoch planvolles Vorgehen und das zu Unrecht. Ein Systemspieler hat nicht mehr Chancen als jemand, der ohne System dieselbe Anzahl von Tips abgibt. Geben Sie dennoch einen mathematisch faßbaren Unterschied zwischen einem Systemspieler und einem 'gewöhnlichen' Spieler an.

Aufgabe:

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine bestimmte Zahl gezogen wird?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine bestimmte Zahl an der 1. Stelle gezogen wird.

Aufgabe:

a) Ein Spieler hat nach der Ausspielung von 4 Zahlen alle richtig. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, daß er 6 Richtige, einen Fünfer mit Zusatzzahl hat?

b) In der Zeitung werden die Gewinnzahlen der Größe nach geordnet veröffentlicht. Jemand hat nur die ersten vier Zahlen lesen können, die sind alle richtig. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, daß der einen Sechser, einen Fünfer mit Zusatzzahl hat?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Lottozahlen in aufsteigender oder absteigender Reihenfolge gezogen werden?

Aufgabe: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei einer Ausspielung ein Zwilling, Drilling, Vierling usw. gezogen wird (damit sind aufeinanderfolgende Zahlen gemeint)?

Aufgabe:

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine bestimmte Zahl bei der nächsten Ausspielung wieder gezogen wird?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens eine, keine, genau drei der gezogenen Zahl bei der unmittelbar nächsten Ziehung wieder gezogen wird.

Aufgabe: Was vergrößert die Gewinnwahrscheinlichkeit:

a) 1 Mio. verschiedene Tips in derselben Ziehung

b) 100000 Tips in 10 Ziehungen

c) 1 Mio. zufällig gewählte Tips in derselben Ziehung

d) 1 Tip in 1 Mio. Ziehungen

Aufgabe:

a) Wie viele Gewinne werden im Mittel in den einzelnen Gewinnklassen gemacht?

b) Wie groß ist die durchschnittliche Zahl richtiger Tips?

c) Wie groß ist der Gewinn im Mittel?

Aufgabe:

a) Ist es nachteilig, Tippreihen wie 1, 2, 3, 4, 5, 6 abzugeben?

b) Ist es günstiger mehrere Tippreihen wahllos abzugeben oder mit System zu spielen?

c) Eine Zahl wurde längere Zeit nicht gespielt, steigt ihre Wahrscheinlichkeit, bei der nächsten Runde gezogen zu werden?

Aufgabe: Ein Spieler spielt System mit 3 Bankzahlen und allen Kombinationen aus 7 Systemzahlen. Der Spieler hat mit den Bankzahlen 2 Gewinnzahlen getroffen, mit den Systemzahlen 4 Treffer. Wie viele Gewinne hat der Spieler in den einzelnen Rängen?

Aufgabe: Wie viele Runden vergehen im Durchschnitt, bis eine gegebene Zahl gezogen wird?

Aufgabe: In einem Buch über Lotto stehen für den Spieler folgende Ratschläge:

- Der Spieler soll keine geometrischen Muster ankreuzen, insbesondere Diagonalen, Zeilen oder Spalten sind zu vermeiden.
- Der Spieler soll keine arithmetischen 'Muster' ankreuzen; die Zahlenspielereien kennen auch die anderen.
- Gezogene Zahlenkombinationen sind zu vermeiden

Sind die Ratschläge ernst gemeint? Nehmen Sie dazu ausführlich Stellung, bevor Sie umblättern.

Eine Auswertung im Schweizer Zahlenlotto hat über das Tippverhalten folgendes ergeben: Von 16 Mio Tips einer Runde entfielen auf die folgenden lexikographisch geordneten Kombinationen folgende Zahl von Tips:

1	2	3	4	5	6	10637
1	2	3	43	44	45	2729
1	7	13	19	25	31	6586
1	8	15	22	29	36	24009
2	7	17	21	24	41	3098
2	8	14	20	26	32	4414
3	9	15	21	27	33	11297
4	8	21	23	37	42	2722
4	10	16	22	28	34	8147
5	10	15	20	25	30	3162
5	11	17	23	29	35	4528
6	11	16	21	26	31	24120
6	12	18	24	30	36	8663
7	8	9	10	11	12	2909
7	13	19	25	31	37	3032
7	14	21	28	35	42	17913
8	14	17	25	31	36	12008
9	15	21	27	33	39	4904
10	16	22	28	34	40	3821
12	17	22	27	32	37	10170
12	18	24	30	36	42	2846
12	25	32	35	42	44	3725
13	14	15	16	17	18	3461
15	21	27	33	39	45	3009
18	23	28	33	38	43	8354
19	20	21	22	23	24	3783
25	26	27	28	29	30	3291
31	32	33	34	35	36	3198
37	38	39	40	41	42	2849
40	41	42	43	44	45	4309

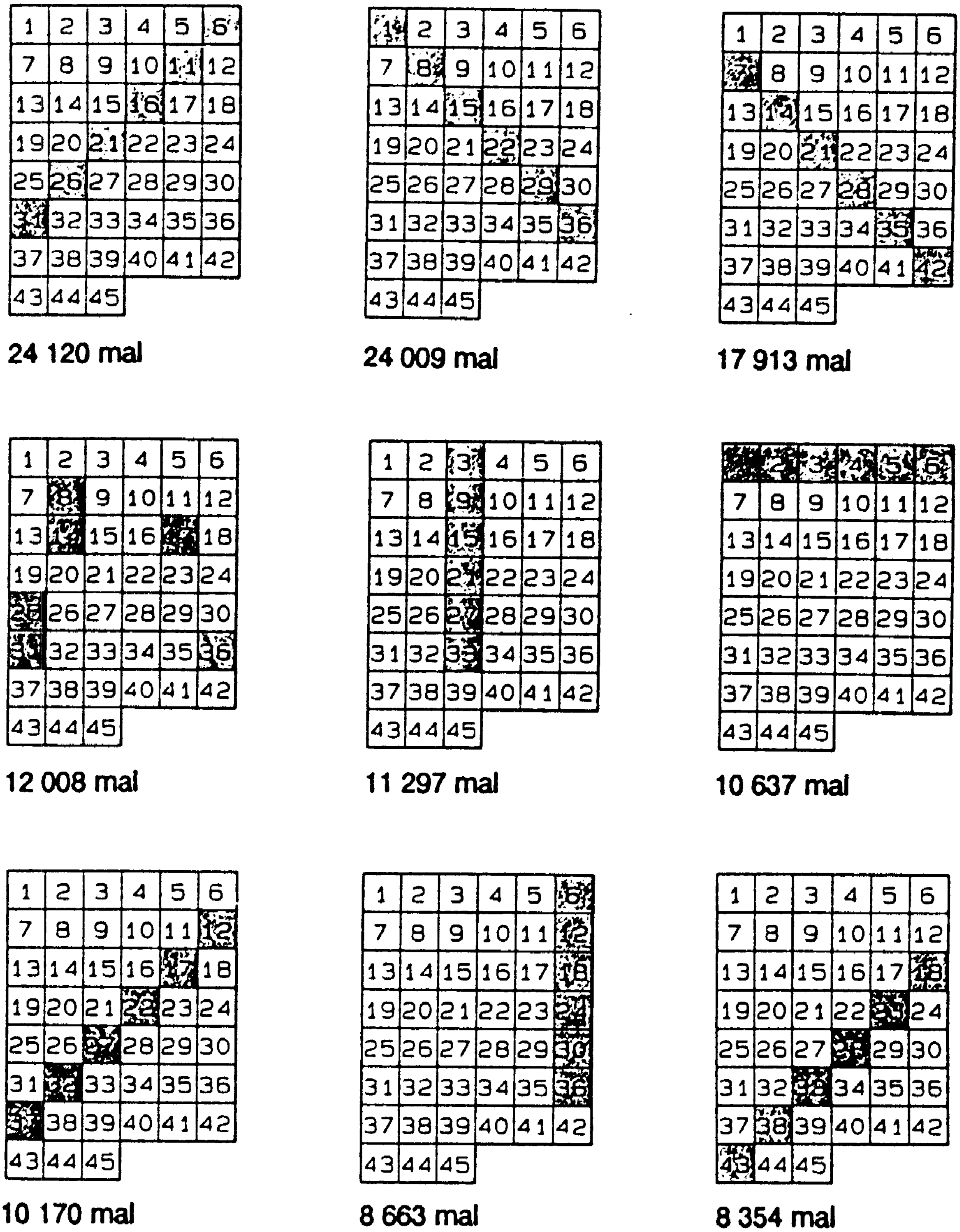

Abb. 5: Die 9 häufigsten Tips der Schweizer Lotto-Spieler als geometrische Muster am Wettschein.

b) Roulette

Regeln: Die Zahlen von 0 bis 36 sind gezielt über den Kreisumfang verstreut. Die Casinos unternehmen alles, damit die physikalische Symmetrie zwischen den einzelnen Sektoren gewährleistet ist. Letztlich würde das Casino selbst als erstes darunter leiden, falls einzelne Zahlen oder größere Sektoren bevorzugt wären. Das hätte nämlich zur Folge, daß findige Spieler das bemerken, verstärkt auf diese Zahlen setzen und öfter gewännen als 'ausgemacht'.

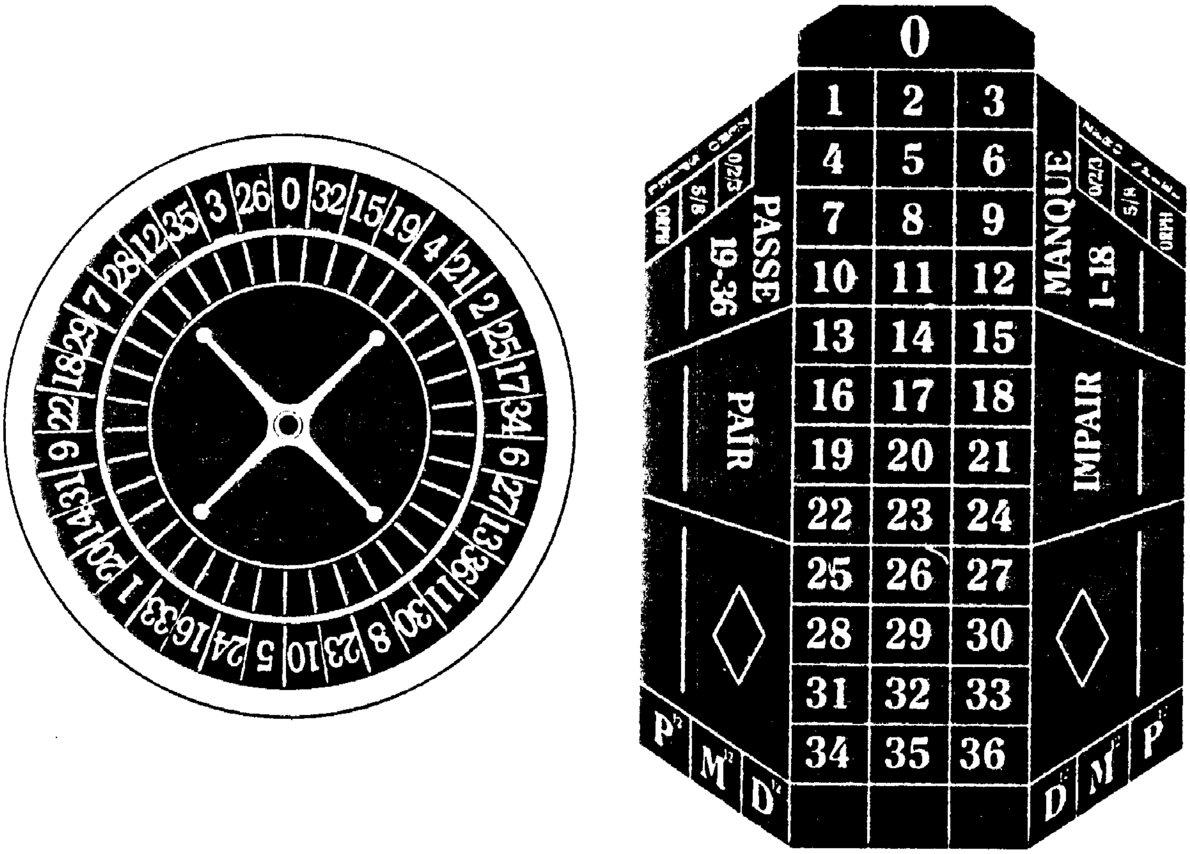

Abb. 6: Roulette-Rad und Spielplan.

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die vielfältigen Möglichkeiten, beim Roulette zu setzen.

Setzmöglichkeit	Auszahlung als Vielfaches	Gewinn des Einsatzes
plein: eine Zahl	36	35
à cheval: 2 benachbarte Zahlen	18	17
transversale pleine: Querreihe von 3 Zahlen	12	11
transversale simple: 2 benachbarte Querreihen	6	5
carré: 4 Zahlen, die am Spielplan in einem Punkt zusammenstoßen	9	8
colonne: Längsreihe von 12 Zahlen	3	2
douze premier (milieu, dernier)	3	2
pair: gerade	2	1
impair: ungerade	2	1
rouge: rot	2	1
noir: schwarz	2	1
manque: die 1. Hälfte	2	1
passe: die 2. Hälfte	2	1

Die Zahlen 1 bis 36 sind am Spieltisch fortlaufend in drei Kolonnen angeordnet, die *zero* befindet sich oberhalb dieser Matrix. Man setzt, indem man seine Jetons am Spielplan auf die entsprechenden Felder legt. Man setzt z.B. auf ein *carré*, indem man den Jeton auf den Kreuzungspunkt von vier benachbarten Zahlen legt. Die Gewinne werden in Quoten abgerechnet, da 4 Möglichkeiten zutreffen, erhält man netto 8 Jetons, falls die Kugel in eines der gesetzten vier Fächer fällt; man erhält brutto 9 Jetons, 8 als Gewinn und den Einsatz. Diese Unterscheidung von Gewinn brutto und netto mag verwirren, ist jedoch wichtig zur Beurteilung, ob das Spiel fair ist. Ganz allgemein, hat man c Gewinnzahlen, so erhält man einen Nettogewinn im Verhältnis von (36-c) : c, d.h. 36/c - 1 : 1; anders ausgedrückt, man gewinnt netto 36/c - 1 Jetons für jeden gesetzten Jeton. Für das *carré* ist c =4, also erhält man nach dieser Regel 8 Jetons netto ausbezahlt.

Wahrscheinlichkeiten: Da die Setzmöglichkeiten einfache Teilmengen einer überschaubaren Menge von 37 Möglichkeiten sind, ist zur Berechnung von Gewinnwahrscheinlichkeiten nicht einmal der Einsatz kombinatorischer Hilfsmittel nötig. Man kann die Mengen direkt abzählen. Einfache Überlegungen führen zur Berechnung des erwarteten Verlusts mit 1/37 des Einsatzes, also rund 2,7%. Dies berücksichtigt noch gar nicht die *zero*-Regel, wonach beim Setzen auf einfache Chancen (z.B. *rouge*) beim Auftreten von *zero* der Einsatz zunächst noch nicht verloren ist. Er wandert in den sogenannten prison, von wo er beim nächsten Spiel entweder ohne Gewinn gerettet oder endgültig verloren wird, je nachdem, ob die gesetzte einfache Chance kommt oder ausbleibt. Dies verringert den erwarteten Verlust auf 1,35%.

Der Verlust des Spielers ist eine Zufallsvariable, deren Verteilung von der Zahl c der gesetzten Zahlen abhängt; deren Erwartungswert ist 2,7% des Einsatzes S (mit Ausnahme der einfachen Chancen), deren Varianz mit elementaren Mitteln zu berechnen ist. Wichtig ist nun die Entwicklung der Verlustes mit Fortdauer der Spiele, hier einmal vorausgesetzt, daß der Spieler immer auf dieselbe Gewinnchance denselben Betrag setzt. Hier summiert man die Verluste über die einzelnen Spiele, für die Summe der Verluste greift der Zentrale Grenzverteilungssatz und damit die immer besser passende 3σ-Regel.

Die Varianz des mittleren Verlustes pro Spiel entwickelt sich nach dem 1/Wurzel N - Gesetz, das heißt, man kann zeigen, daß der mittlere Verlust eine Varianz hat, die mit $1/\sqrt{N}$ gegen 0 geht. Nach der 3-σ-Regel befindet sich jedoch fast die gesamte Verteilung innerhalb von 3σ-Grenzen vom Mittelwert, dies umso besser, je besser die Normalverteilung die Verteilung beschreibt. Obwohl der erwartete Verlust pro Spiel nur 2,7% vom Einsatz pro Runde beträgt, wird es mit Fortdauer des Spiels immer wahrscheinlicher, daß der Spieler einen mittleren *Verlust* und nicht einen Gewinn erlebt. Die folgende Abbildung zeigt den mittleren Verlust und die 3σ-Grenzen, dazwischen die Zone, innerhalb derer sich der Verlust entwickeln wird. Wesentlich ist, daß alle Ergebnisse mit relativ einfachen Mitteln abgeleitet werden können.

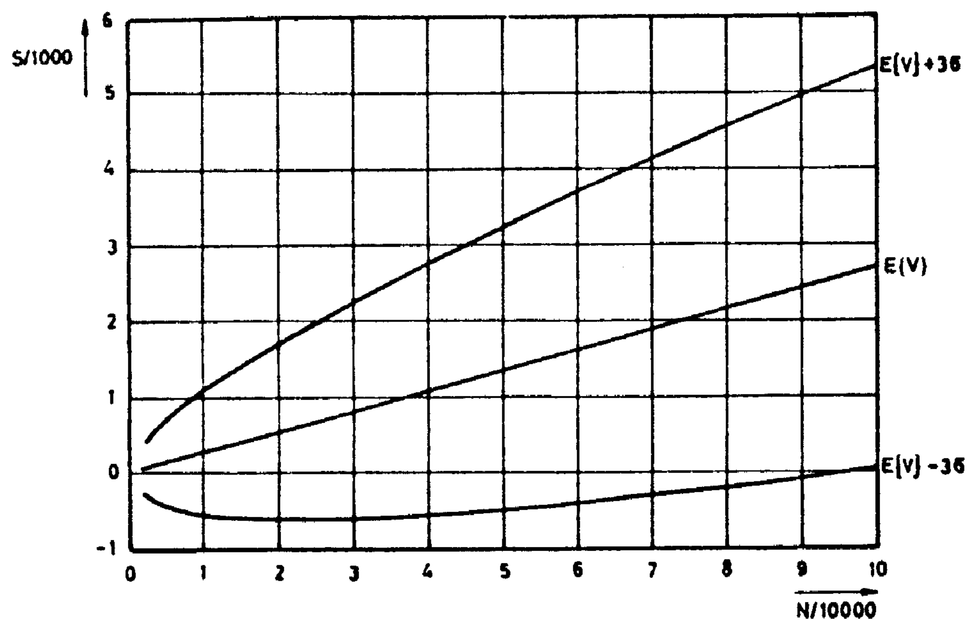

Abb. 7: Verlust V in Tausendstel des Einsatzes S - in Abhängigkeit von der Zahl der Spiele beim Setzen auf ein *carré*; mittlere Kurve = Erwartungswert, untere und obere Kurven = 95%- Grenzen für den tatsächlichen Verlust.

Strategien: Es gibt eine Reihe von Strategien, die auf vermuteten Abhängigkeiten der einzelnen Spiele basieren. Die Spieler verleugnen die stochastische Unabhängigkeit der Spiele, was aber in der klassischen mathematischen Modellierung des Roulettes eine grundlegende Säule darstellt. Diese Spieler kommen dann zu Schlüssen wie: Nach zwölfmal *rouge* muß jetzt der Ausgleich kommen (ein mißverstandenes Ergebnis aus dem Gesetz der Großen Zahlen), d.h. jetzt kommt eher *noir*. Manche wiederum meinen, daß man jetzt *rouge* nachsetzen müsse. Kompliziertere Strategien basieren auf den Wahrscheinlichkeiten von Bildern drei oder mehrerer aufeinanderfolgender Spiele und ergänzen nach zwei Spielen jene Figur (setzen auf diese), welche zu Anfang des Spieles die größte Wahrscheinlichkeit gehabt hätte. Auch hier wiederum wird nicht beachtet, daß das dritte Spiel unabhängig von den vorangegangenen seine eigenen (unveränderten) Wahrscheinlichkeiten hat. Diese und noch buntere Strategien, welche eben meist auf bestimmten hineingedeuteten Abhängigkeiten aufbauen, findet man u.a. in Graph (1989).

Eine ganz andere Kategorie von Strategien basieren auf mathematisch korrekter Analyse. Sie spiegeln interessante Eigenheiten des Zufalls wider. Allen diesen Strategien ist gemeinsam, daß man die Gewinn- bzw. Verlusterwartung nicht verändern kann, sehr wohl kann man aber die Streuung der Gewinne erheblich beeinflussen. Wenn nun die Streuung rund um den Erwartungswert viel größer wird in der Abbildung weiter oben, so kann man erahnen, daß kurzfristig auch ganz hohe Gewinne möglich, wenn auch nicht übermäßig wahrscheinlich werden.

Die Strategien gehen davon aus, daß man auf dieselbe Gewinnchance wiederholt setzt, daß man aber den Einsatz entsprechend variiert. In Koken (1987) findet man eine ausführliche Darstellung und Analyse solcher Strategien. Hier sollen nur eine wesentliche Punkte kurz angesprochen werden. Beim masse égale wird immer wieder derselbe Einsatz gespielt, egal was vorher passiert ist, das war die oben besprochene Situation. Progessionsspiele erhöhen den Einsatz unter bestimmten Bedingungen. Etwa wird bei Verlust der Einsatz verdoppelt, daran knüpft sich auch das Petersburger Paradoxon. Hätte man unendlich viel Kapital und wäre der Einsatz am Spieltisch nicht beschränkt, so könnte man (mitunter erst nach langer Zeit) jeden anfänglichen Verlust wieder abwehren. Bei 50 Schilling Grundeinsatz auf eine einfache Chance hat man in der 11. Runde (nach 10 Fehlschlägen) dann einen Einsatz von $2^{10} \cdot 50 = 51\,200$. In österreichischen Casinos ist beim Spielen auf einfache Chancen das Tischlimit das 1200fache des Grundeinsatzes. Die 11. Runde ist also die letzte, wo Verdoppeln noch erlaubt ist. Der Gewinn in dieser 11. Runde wäre gerade der Grundeinsatz S von 50 Schilling, wie man leicht aus geometrischen Reihe herleitet. Der erwartete Gewinn pro Runde ist im Gewinnfall 0,473 vom Grundeinsatz. Der Verlust ist die Summe der Einsätze, bis man das Spiellimit (bei 11 Runden) erreicht hat: $(2^{11}-1)S = 2047 \cdot 50 = 102\,350$. Um diesen Verlust wieder abzudecken, muß man $2047/0{,}473 = 4328$ Serien ohne Verlustfall überstehen. Die Wahrscheinlichkeit für eine Verlustserie kann man auch elementar berechnen (man beachte, daß man beim Setzen auf *rouge* zuerst noch einmal *rouge* haben muß und dann 11mal *noir* in Folge):

$$\frac{18}{37} \cdot \left(\frac{19}{37}\right)^{11} = 0{,}000\,3185$$

Auf eine Spielstrecke von 3 139 Serien ist mit *einem* Verlustlauf zu rechnen. Man sieht, hat man einmal verloren, so ergibt sich eine Spirale; bis man den

Verlust wettmacht, hat man ein zweites Mal verloren. Je länger man spielt, umso eher kommt man in die Verlustzone.

Eine ganz andere Strategie besteht darin, gerade bei Gewinn den Einsatz stehen zu lassen und auf einen Doppelschlag zu hoffen. Hier ergeben sich reizvolle Spiele mit hoher Verlustwahrscheinlichkeit aber auch hohen Gewinnen, falls dieser Doppelschlag erfolgreich verläuft. Für Details muß hier auf Koken (1987) verwiesen werden.

Aufgaben und Bemerkungen: Auch beim Roulette sollen in Form von Aufgaben weitere wesentliche Eigenschaften angesprochen werden.

Aufgabe: Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, zu gewinnen, für die verschiedenen Setzmöglichkeiten.

Aufgabe: Vergleichen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeiten und die Auszahlungsquoten. Soll man sich auf die Quoten der Auszahlung oder die für den Gewinn beziehen?

Aufgabe: Sieht man einmal ab, daß die *zero* auch mitspielt, so haben *rouge* und *noir* je 1/2 als Wahrscheinlichkeit. Zwei Spieler A und B spielen auf das Auftreten einer Figur, wer als erster seine Figur hat, hat gewonnen.

a) A setzt auf *RRR*, B auf *RNR*. Hat einer der beiden einen Vorteil? Man berechne die Gewinnwahrscheinlichkeit von A und B.
b) A setzt auf *RRR RRR*, B setzt auf *RNR NRN*. Ist jetzt einer der beiden im Vorteil? Lösen Sie das Problem durch Simulation der Serien.

Aufgabe: Setzt man auf einfache Chancen (*rouge* z.B.) und sieht man einmal von *zero* ab, so kann man den Verlauf des Gewinns bzw. Verlusts in Abhängigkeit von der Spieldauer als Irrfahrt in der Ebene auffassen. Der entstehende Polygonzug hat etwa das Aussehen wie in folgender Abbildung:

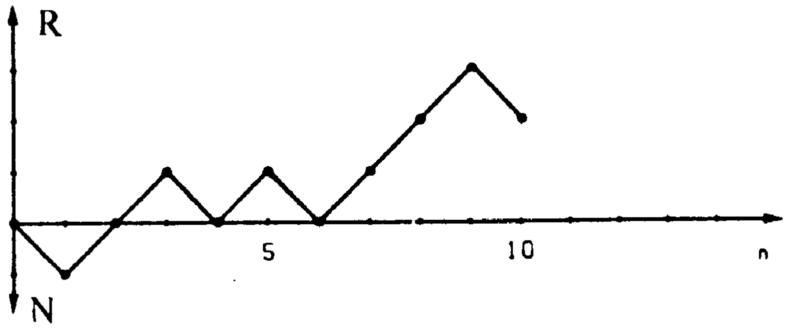

Abb. 8: Entwicklung des Verlustes in Abhängigkeit von der Dauer des Spiels.

Fragt man nun, wie diese Kurve sich entwickeln wird, so erhält man von vielen Personen zur Antwort, sie werde mehr oder weniger um die erste Achse wackeln, weil ja nach dem Gesetz der Großen Zahlen sich Gewinne und Verluste ausgleichen (die *zero* wurde ja nicht berücksichtigt). Feller (1970) hat neben der mathematischen Herleitung von Eigenschaften dieser Irrfahrt auch eine Simulation von 10 000 Spielen (bei ihm sind es Münzwürfe) durchgeführt. Zu fragen sind etwa:

- o Wie lange dauert es, bis man von einem Nulldurchgang (Ausgangslage, kein Gewinn, kein Verlust) bis zum nächsten Nulldurchgang gelangt?
- o Welche maximalen Höhen (Gewinne) bzw. Tiefen werden dabei erreicht?

Bentz (1983) hat 1000 Serien simuliert, das Protokoll für die ersten 100 Serien wird im folgenden wiedergegeben. Die hervorstechenden Läufe Nr. 246, 717, 756 und 897 sind gesondert angeführt. Die Simulation unterstreicht, daß lange Nullwartezeiten entstehen und extreme Höhen entstehen.

Charakterisierung des Spiels: Roulette ist ein Spiel der Minderheit, ca. 5% der Erwachsenen spielen Roulette, dagegen nehmen ca. 80% mehr oder weniger regelmäßig an Glücksspielen teil. Aber es werden höhere Umsätze als bei anderen Glücksspielen zusammen getätigt, wenn man einmal das moderne Lotto ausnimmt. Roulette ist ein sehr faires Spiel, beim Setzen auf einfache Chancen ist die Verlusterwartung nur 1,35%, bei anderen Spielen 2,7% vom Einsatz. Das Casino lebt aber geradezu von den Spielern, die lange am Roulettetisch verbleiben. Warum tun dies die Spieler? Sie verwerfen die mathematische Unabhängigkeit und basieren ihre Strategien darauf. Bestätigt werden sie durch häufige, zwischenzeitige Gewinne in nicht unbeträchtlicher

Versuch Nr.	Länge	max. Höhe	Versuch Nr.	Länge	max. Höhe
1	6	3	51	2	1
2	8	-2	52	4	2
3	6	3	53	2	1
4	2	-1	54	2	1
5	8	2	55	28	-5
6	2	-1	56	2	1
7	2	-1	57	2	1
8	64	13	58	2	1
9	2	-1	59	2	-1
10	4	-2	60	4	2
11	304	-22	61	2	1
12	2	-1	62	2	1
13	2	-1	63	2	1
14	2	-1	64	2	1
15	2	1	65	1188	32
16	2	-1	66	6	3
17	2	-1	67	4	-2
18	2	-1	68	2	-1
19	326	-28	69	2	1
20	88	8	70	2	1
21	2	-1	71	2	-1
22	2	1	72	2	-1
23	2	1	73	450	22
24	2	-1	74	256	-17
25	12	5	75	2	-1
26	2	-1	76	2	1
27	2	-1	77	2	-1
28	42	-8	78	10	-4
29	14	3	79	2	-1
30	8	-3	80	2	-1
31	2	1	81	10	-4
32	2	1	82	12	-3
33	2	1	83	2	-1
34	2	-1	84	2112	-65
35	18	-4	85	8	3
36	8	3	86	2	1
37	10416	-230	87	266	-19
38	2	1	88	4	-2
39	4	2	89	4	2
40	2	1	90	2	-1
41	6	2	91	2	1
42	12	-5	92	2	1
43	6	-3	93	2	1
44	2	1	94	2	-1
45	2	1	95	2	-1
46	8	3	96	2	-1
47	2	-1	97	2	1
48	2	1	98	2	1
49	2	-1	99	90	10
50	4	2	100	2256	-53
246	46906	286	756	20022	-162
717	18292	-171	897	163222	817

Höhe, wie dies die letzte Simulation zeigt. Sie gewinnen also häufig und recht hoch und werden so zum Spieler 'erzogen'; auf die Frage nach dem warum sie gewinnen, geben sie sich bald die Antwort, daß sie ihr Glück spüren, daß sie das richtige System haben etc. Die Simulation oben zeigt aber auch, daß es hoffnungslos ist, einem einmal erlittenen Verlust nachzulaufen und das Geld zurückzugewinnen. Denn, je länger man spielt, umso eher kommt man in die langen und tiefen Verläufe und die Talsohle unterschreitet den finanziellen Horizont des Spielers.

4. Zusammenfassung

Lotto und Roulette im gerafften Vergleich:

	Lotto	Roulette
Setzen	einfach	vielfältig
Ausspielen	TV	life
Einsätze	klein	klein bis hoch
Gewinne	enorm, aber selten	klein, aber häufig
Erwarteter Verlust	50%	1,35% 2,7% 5,4% (nach Strategie)
Varianz des Verlusts		abhängig von Strategie
Strategien	absurd	mathematische und absurde
Spannung	enorme mögliche Gewinne	durch häufige Gewinne zum Spieler erzogen

Die Analyse der Spiele zeigt einen ganz unterschiedlichen Charakter. Es gibt eine Reihe von Fehlvorstellungen, auch nach mathematischer Unterweisung (falsches Verständnis des Gesetzes der Großen Zahlen z.B.), die den Spielern eine höhere Wahrscheinlichkeit zu gewinnen vorgaukeln. Man sollte spielen, wenn es Spaß macht, jedoch angemessen seinem eigenen finanziellen Hintergrund. Jedes Vergnügen kostet etwas. Spielen mit dem Gedanken, man könnte gewinnen, ist nicht zielführend, wie die obigen Ausführungen zeigen.

Für den Stochastik-Unterricht bleibt das Resumé, daß Spiele wesentlicher Bestandteil unserer Zivilisation sind und daß man hier aufklärend wirken kann. Darüberhinaus aber eröffnen gerade Glücksspiele einen Zugang zu den typischen Begriffen der Theorie und zur damit verbundenen Denkungsart. Diese Begriffe sind ja eben im Zusammenhang mit Glücksspielen entstanden.

Man kann Glücksspiele, befreit von dem monetären Charakter, als vereinfachte Bilder einer Theorie begreifen. Sie bilden ein effizientes Medium, um über Begriffe und Probleme zu sprechen. Wie die Diskussion der Glücksspiele aber zeigt, sind auch mit diesen einfachen Situationen eine Fülle von Fehlvorstellungen verbunden, die sich auf stochastische Begriffe im allgemeinen erstrecken. Im Glücksspielbereich hat man aber eine Chance, diesen Fehlvorstellungen entgegenzutreten.

Im Sinne einer anwendungsorientierten Mathematik sollte man aber dahin gelangen, daß diese Bilder auch als Referenzmodelle für andere Anwendungen stehen, damit die aktuelle Bandbreite und Relevanz der Begriffe unterstrichen wird. Stochastik hat sich zwar aus den Glücksspielen heraus entwickelt, die damit verbundene Denkungsart jedoch dient heute als einer der wesentlichen Ansätze, Probleme aus den verschiedensten Fachgebieten mathematisch zu bewältigen.

Literatur

Barth, F., Haller, R.: 1984, *Stochastik. Leistungskurs*, Ehrenwirt, München.

Bentz, H.-J. (Hrsg.): 1983, Probleme im Umgang mit dem Zufall, *Der Mathematik-Unterricht* 29, Heft 1.

Borovcnik, M.: 1992: *Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik*, Bibliographisches Institut, Mannheim.

Feller, W.: 1970, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, J. Wiley, New York.

Feuerpfeil, J., Heigl, F., Wiedling, H.: 1983, *Praktische Stochastik*, Bayerischer Schulbuchverlag, München.

Graph, L.v.: 1989, *Roulette. Regeln, Chancen, Strategien*, Heyne, München.

Gundel, H.: 1987, Das Aufgabenfeld Lotto, *Aufgabenstellen im Stochastikunterricht 1*, Deutsches Institut für Fernstudien, Tübingen.

Hald, A.: 1990, *A History of Probability and Statistics and their Applications before 1750*, J. Wiley, New York.

Koken, C.: 1987, *Roulette, Computersimulationen und Wahrscheinlichkeitsanalyse von Spiel und Strategien*, Oldenbourg, München.

Riedwyl, H.: 1990, *Zahlenlotto. Wie man mehr gewinnt*, Haupt, Bern.